حل عددی معادله جریان غیر دائمی آب زیرزمینی به روش تفاضلات محدود صریح و غیر صریح با کاربرد صفحه گسترده

فرزین سلماسی

مقدمه

معادله لاپلاس هنگامی که تغذیه یا تخلیه از سفره آب زیرزمینی وجود داشته باشد، به نام معادله پواسون خوانده می شود. این معادله در زیر ارائه شده است:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}=-\frac{R(x,y)}{T} \qquad (۱)$$

در رابطه فوق $h(x,y)$ بار آبی، T ضریب انتقال با دیمانسیون $[L^2\ T^{-1}]$ و برابر حاصل ضرب نفوذپذیری و ضخامت سفره و R تخلیه یا تغذیه نقطه ای یا گسترده $[L\ T^{-1}]$ از سفره است. ژاکوب معادله یک بعدی پواسون را برای جزیره طولانی حل تحلیلی نمود [۳]. تیم حل تحلیلی معادله دوبعدی پواسون را به دست آورد [۵]. در جریان غیر دائمی تغییر ذخیره در خاک نیز وارد معادله ۱ شده و لذا خواهیم داشت [۲]:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}=\frac{S}{T}\frac{\partial h}{\partial t}-\frac{R(x,y,t)}{T} \qquad (۲)$$

معادله ۲ حالت دو بعدی جریان در خاک در شرایط غیر دائمی را نشان می دهد. در این رابطه S ضریب ذخیره نامیده می شود. برای حل آن به روش عددی علاوه بر شرایط مرزی، به شرط اولیه نیز احتیاج است.

مواد و روش ها

با کاربرد سری تیلور و بسط آن جهت گسسته سازی معادله ۲ به فرم تفاضلات محدود صریح خواهیم داشت:

$$\frac{h^n{}_{i+1,j}-2h^n{}_{i,j}+h^n{}_{i-1,j}}{\Delta x^2}+\frac{h^n{}_{i,j+1}-2h^n{}_{i,j}+h^n{}_{i,j-1}}{\Delta y^2}=\frac{S}{T}\frac{h^{n+1}{}_{i,j}-h^n{}_{i,j}}{\Delta t}-\frac{R^n{}_{i,j}}{T} \qquad (۳)$$

در معادله ۴، i و j مشخصه مکان و n مشخصه زمان می باشند. اگر فرض گردد که $\Delta x=\Delta y=a$ و معادله ۳ را بر حسب مجهول $h_{i,j}^{n+1}$ حل کنیم، داریم:

$$h_{i,j}^{n+1}=\left(1-\frac{4T\Delta t}{S\,a^2}\right)h_{i,j}^n+\left(\frac{4T\Delta t}{S\,a^2}\right)\left(\frac{h^n{}_{i+1,j}+h^n{}_{i-1,j}+h^n{}_{i,j+1}+h_{i,j-1}^n}{4}\right)+\frac{R^n{}_{i,j}\,\Delta t}{S} \qquad (۴)$$

معادله ۴ فرم صریح تفاضلات محدود است زیرا در آن $h_{i,j}^{n+1}$ بر حسب مقادیر معلوم بار آبی و در زمان ماقبل خود بدست می آید. فرم غیر صریح معادله ۲ را به صورت زیر استخراج می نمائیم:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}=\alpha\frac{h^{n+1}{}_{i+1,j}-2h^{n+1}{}_{i,j}+h^{n+1}{}_{i-1,j}}{\Delta x^2}+(1-\alpha)\frac{h^n{}_{i+1,j}-2h^n{}_{i,j}+h^n{}_{i-1,j}}{\Delta x^2} \qquad (۵)$$

در معادله ۵ α به نام ضریب واهلش[۱] یا فاکتور وزن خوانده می شود. حالت بهینه فاکتور وزن عموما بین ۱ و ۲ حاصل می شود [۵]. حالت $0<\alpha<1$ به نام تحت واهلش[۲] خوانده شده که در واقع معرف درون یابی بین مقدار

1 - Relaxation
2 - Under relaxation

قدیمی هد آبی $h^{n}_{i,j}$ و مقدار گوس– سایدل $h^{n+1}_{i,j}$ است و حالت $\alpha > 1$ به نام فوق واهلش[۱] خوانده می شود که معرف برون یابی مقدار گوس- سایدل است [۴]. سلماسی با حل معادله لاپلاس به روش تفاضلات محدود نشان داد که مقدار بهینه ضریب واهلش با حداقل تعداد تکرار بین ۱/۷ تا ۱/۹ می باشد [۱]. به همین ترتیب در جهت y نیز مشتق مرتبه دوم را بدست می آوریم. با تعریف پارامتر زیر جهت سهولت داریم:

$$h^{*\,n}_{i,j} = \left(\frac{h^{n}{}_{i+1,j} + h^{n}{}_{i-1,j} + h^{n}{}_{i,j+1} + h^{n}_{i,j-1}}{4} \right) \qquad (۶)$$

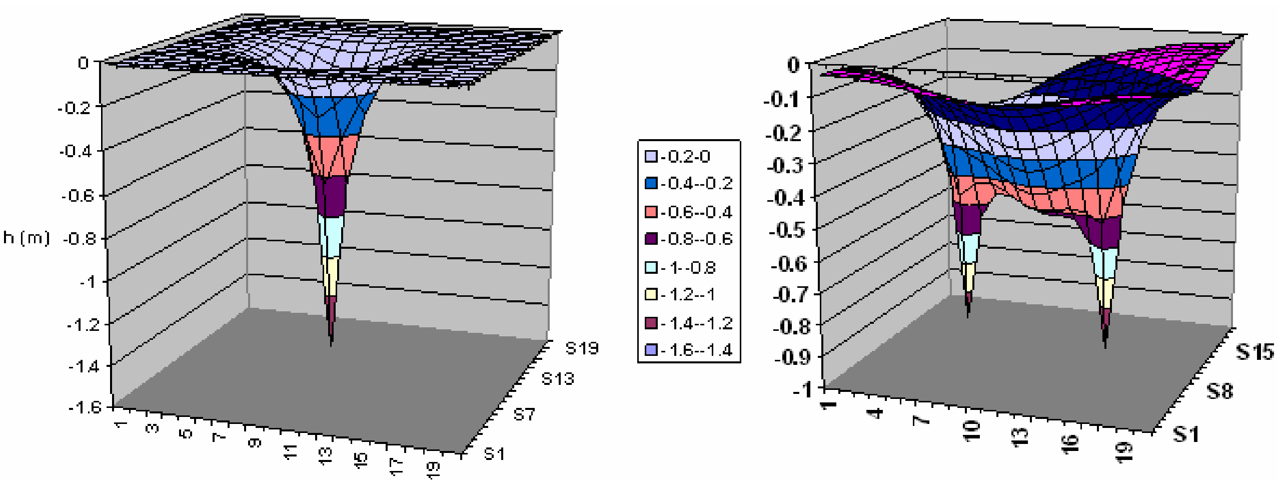
با قرار دادن معادلات ۵ و ۶ در معادله ۲ و ساده سازی بر حسب مجهول خواهیم داشت:

$$h^{n+1}_{i,j} = \left(\frac{1}{[(a^2 S / 4T\Delta t) + \alpha]} \right) \left[\alpha . h^{*\,n+1}_{i,j} + \frac{a^2 S}{4T\Delta t} h^{n}_{i,j} + (1-\alpha)(h^{*\,n}_{i,j} - h^{n}_{i,j}) + \frac{a^2 R^{n}{}_{i,j}}{4T} \right] \qquad (۷)$$

معادله ۷ فرم غیر صریح تفاضلات محدود را در دو بعد نشان می دهد. در هر حالت انتخاب بازه های طولی و زمانی پایدار است و لذا بر روش صریح ارجحیت دارد.

نتایج و بحث

در این تحقیق برای حل معادله دیفرانسیلی با شرایط مرزی و اولیه از صفحه گسترده Excel استفاده می شود. مزیت این کار در این است که همگان با این نرم افزار از سری نرم افزارهای شرکت مایکرسافت آشنا بوده و یاد گیری آن راحت و نیاز به دانستن زبان برنامه نوسی خاصی مانند فرترن، پاسکال ، ویژوال بیسیک و غیره ندارد. ابتدا معادله گسسته شده دیفرانسیلی در سل مبدا نوشته شده و به سایر سل ها در صفحه گسترده کپی می شود. سپس از طریق منوی Tools/Options/Calculation و کلیک دکمه مربوطه، محاسبات شروع می گردد. در شکل ۱ مثالی از حل به روش تفاضلات محدود غیر صریح شامل برداشت آب از سفره آب زیرزمینی در یک و دو نقطه و مشاهده سه بعدی مخروط افت حاصله نشان داده شده است.



شکل ۱- مخروط افت سطح آب پس از ۲ دقیقه از شروع پمپاژ شامل یک چاه (سمت چپ) با دبی ۱۰۰۰ متر مکعب در روز و دو چاه (سمت راست) هر یک با دبی ۵۰۰ متر مکعب در روز

منابع

[۱]- سلماسی، ف. ۱۳۸۷. کلی ترین حالت حل معادله لاپلاس به روش تفاضلات محدود و تعیین مقدار بهینه ضریب واهلش با حداقل تعداد تکرار لازم. مجموعه مقالات سومین کنفرانس مدیریت منابع آب ایران. تبریز.

[1] - Over relaxation

[۲]- چیت سازان، م. و کشکولی، ح. ع. ۱۳۸۱. (ترجمه)، مدل سازی آب های زیرزمینی و حل مسائل هیدروژئولوژی. انتشارات دانشگاه شهید چمران اهواز.

[3]- Jacob, C. E. 1943, Correlation of ground-water levels and precipitation on long island, New York. Trans. Amer. Geophysical union, 564-573.

[4]- Rajasekaran S. 1992, Numerical methods in science and engineering. A practical approach.

[5]- Wang H. F. and Anderson M. P. 1982, Introduction to groundwater modeling. Finite difference and finite element methods. 237 pp.