حل عددی معادله پواسون به روش تفاضلات محدود صریح و مقایسه آن با حل تحلیلی

فرزین سلماسی
استادیار گروه مهندسی آب، دانشکده کشاورزی، دانشگاه تبریز

مقدمه

قانون دارسی برای جریان آب درون خاک ایزوتروپ در جهات سه گانه به صورت زیر بیان می شود:

$$q = -K * grad\, h \qquad (۱)$$

معادله پیوستگی در حالت سه بعدی به شرح زیر می باشد:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} 0 \qquad (۲)$$

با ترکیب قانون دارسی و پیوستگی، معادله لاپلاس به صورت زیر بدست می آید:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \qquad (۳)$$

معادله فوق تحت شرایط خاک همگن و ایزوتروپ و جریان ماندگار (مستقل از زمان) برقرار است. انتقال حرارت در جامدات نیز طبق معادله لاپلاس بیان می گردد. سلماسی (۱۳۷۸، ب) حل معادله لاپلاس به روش تفاضلات محدود صریح را با روش تکرار واهلش بکار برد. نتایج نشان دادند که مقدار بهینه ضریب واهلش با حداقل تعداد تکرار بین ۱/۷ تا ۱/۹ می باشد [۲].

هنگامی که تغذیه یا تخلیه از سفره آب زیرزمینی داشته باشیم، معادله لاپلاس به معادله زیر تبدیل می شود:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = -\frac{R(x,y)}{T} \qquad (۴)$$

معادله فوق تحت عنوان معادله پواسون معروف بوده که در آن T ضریب انتقال با دیمانسیون [$L^2\ T^{-1}$] و برابر حاصل ضرب نفوذپذیری و ضخامت سفره آب زیرزمینی است. R تخلیه یا تغذیه نقطه ای یا گسترده [$L\ T^{-1}$] از سفره است. ژاکوب (۱۹۴۳) معادله یک بعدی پواسون را برای جزیره طولانی حل تحلیلی نمود [۳]. تیم (۱۹۵۵) حل تحلیلی معادله دوبعدی پواسون را به صورت زیر ارائه کرد [۴و ۵]:

$$h(r) - h(r_e) = \frac{Q}{2\pi T} Ln \frac{r}{r_e} \qquad (۵)$$

که در آن $r = \sqrt{x^2 + y^2}$، Q دبی تخلیه یا تغذیه $\left(Q(x,y) = \frac{R(x,y)}{\Delta x\, \Delta y} \right)$، r_e شعاع تاثیر و $h(r_e)$ سطح ایستابی اولیه می باشند.

مواد و روش ها

برای حل معادله دو بعدی پواسون به روش تفاضلات محدود صریح داریم:

$$\frac{h_{i-1,j} - 2h_{i,j} + h_{i+1,j}}{\Delta x^2} + \frac{h_{i,j-1} - 2h_{i,j} + h_{i,j+1}}{\Delta y^2} = -\frac{R}{T} \qquad (۶)$$

پس از ساده کردن می توان نوشت:

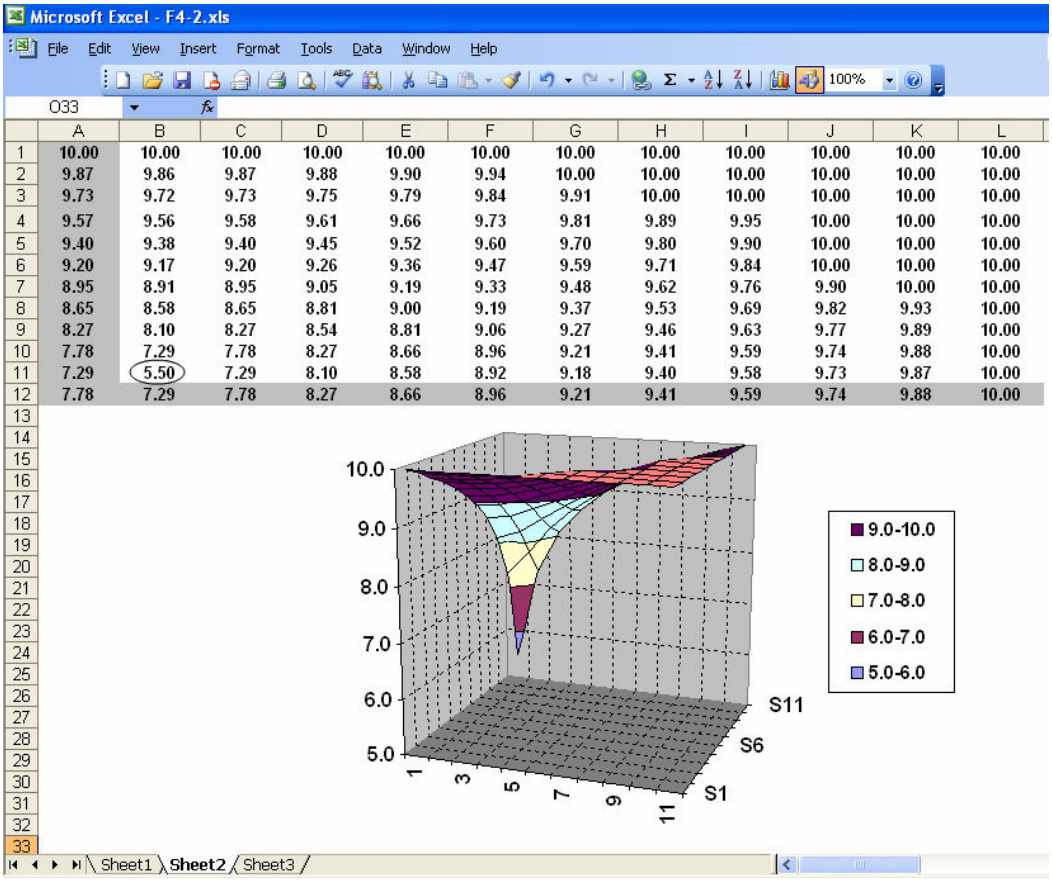
$$h_{i,j} = (h_{i-1,j} + h_{i+1,j} + h_{i,j-1} + h_{i,j+1} + \Delta x^2 * R/T)/4 \quad (for \quad \Delta x = \Delta y) \qquad (۷)$$

برای حل می توان ابتدا بار آبی را در تمام گره ها برابر مقدار فرضی مثلا ۱۰ متر در نظر گرفته و سپس به روش سعی و خطا با کاربرد معادله ۱۰ مقادیر بار آبی در هر گره را اصلاح می کنیم. این کار آنقدر ادامه می یابد تا اختلاف دو بار آبی در دو تکرار متوالی از یک حدی مثلا ۰/۰۰۱ متر کوچکتر گردد. برای مثال منطقه ای را در نظر می گیریم که چاهی در مرکز آن قرار داشته و با دبی فرضی Q پمپاژ از آن انجام می گیرد. جهت سرعت کار و صرفه جویی در محاسبات رایانه، به علت تقارن یک چهارم منطقه را در نظر گرفته و محاسبات را انجام می دهیم. ضمنا محاسبات تفاضلات محدود صریح توسط صفحه گسترده Excel و از طریق منوی Tools/Options/Calculation انجام می پذیرد. استفاده از صفحه گسترده کار را ساده کرده و نیازی به کد نویسی به زبان های رایج مانند فرترن، پاسکال و غیره ندارد. قبلا نیز از صفحه گسترده در محاسبات تکراری برای حل هیدرولیکی شبکه لوله ها استفاده گردیده است [۱]. در مثال مطرح شده فرضیات به شرح زیر می باشند:

$$Q = 2500 \ \ m^3/day \ , \ T = 350 \ \ m^2/day \ \ , \ \ \Delta x = \Delta y = 200 \ \ m$$
$$h(r_e) = h_o = 10 \ \ m \ \ , \ \ r_e = 2000 \quad m$$

نتایج و بحث

محاسبات توسط دو روش عددی تفاضلات محدود صریح و روش تحلیلی تیم انجام شد و نتایج با یکدیگر مقایسه شـدند. در شکل ۱ نتایج محاسبات انجام یافته به روش تفاضلات محدود در صفحه گسترده Excel ارائه گردیده است. در گـره B11 چاه فرضی وجود دارد. به علت در نظر گرفتن تقارن، مرز پایین و چپ غیر قابل نفوذ است. میانگین اختلاف بین مقادیر افت سطح ایستابی در دو روش تحلیلی تیم و تفاضلات
محدود برابر ۰/۰۴ متر بدست آمد.



شکل ۱ خلاصه محاسبات سطح آب زیرزمینی بر اثر پمپاژ در گره B11 توسط صفحه گسترده

مراجع مورد استفاده

[۱]- سلماسی، ف. ۱۳۸۷. الف، محاسبه شبکه لوله ها به وسیله نرم افزار Excel. مجموعه مقالات سومین کنفرانس مدیریت منابع آب ایران. تبریز.

[۲]- سلماسی، ف. ۱۳۸۷. ب، کلی ترین حالت حل معادله لاپلاس به روش تفاضلات محدود و تعیین مقدار بهینه ضریب واهلش با حداقل تعداد تکرار لازم. مجموعه مقالات سومین کنفرانس مدیریت منابع آب ایران. تبریز.

[3]- Jacob, C. E. 1943, Correlation of ground-water levels and precipitation on long island, New York. Trans. Amer. Geophysical union, 564-573.

[4]- Remson I., Hornberger G. M. and Molz F. J. 1971. Numerical methods in subsurface hydrology. New York: Wiley-Interscience, 389 pp.

[5]- Wang H. F. and Anderson M. P. 1982, Introduction to groundwater modeling. Finite difference and finite element methods. 237 pp.