



## ارزیابی محدوده قابل کاربرد مدل‌های فرکتالی در توصیف توزیع اندازه ذرات خاک

محمد تقی تیرگر سلطانی<sup>1</sup>، منوچهر گرجی<sup>1</sup>، علی اصغر ذوالفقاری<sup>1</sup> و محمد نصرالهی<sup>2</sup>

1- به ترتیب کارشناس ارشد، دانشیار و دانشجوی دکتری گروه مهندسی علوم خاک دانشگاه تهران، کرج،

2- دانشجوی کویرشناسی دانشگاه سمنان

Email: [stsoltani@ut.ac.ir](mailto:stsoltani@ut.ac.ir)

### خلاصه

در سال‌های اخیر توابع توانی به خصوص مدل‌های فرکتالی جرم پایه در توصیف توزیع اندازه ذرات خاک به وفور مورد توجه قرار گرفته است. بررسی منابع نشان می‌دهد که استفاده از این مدل‌ها در توزیع اندازه ذرات دارای محدودیت‌هایی می‌باشد. مطالعه حاضر با هدف بررسی محدوده قابل کاربرد توابع توانی (مدل‌های فرکتالی تیلر و ویت کرافت و فیلگوئرا و همکاران) در توصیف توزیع اندازه ذرات خاک انجام شد. به این منظور 25 نمونه خاک با مقادیر رس 5 تا 58 درصد برای انجام آزمایشات توزیع اندازه ذرات خاک مورد استفاده قرار گرفتند. نتایج نشان داد که ذرات اولیه خاک در 40 درصد از خاک‌های مورد مطالعه، تنها در محدوده ذرات کوچکتر از 53 میکرون (رس و سیلت) دارای رفتار فرکتالی می‌باشند و در سایر موارد (خاک‌های رسی)، این محدوده شامل ذرات کوچکتر از 24 میکرون می‌باشد.

کلمات کلیدی: توزیع اندازه ذرات، مدل‌های فرکتالی، محدوده قابل کاربرد

### مقدمه

توزیع اندازه ذرات که تفسیر کامل‌تری از بافت خاک را ارائه می‌کند، مبنای ارزیابی بسیاری از ویژگی‌های فیزیکی خاک محسوب می‌شود و از آن به طور گسترده‌ای در تعیین خصوصیات هیدرولیکی خاک نظیر منحنی رطوبتی، و هدایت آبی اشباع و غیر اشباع استفاده می‌شود (کمبل 1985، وریکن و همکاران 1989). توزیع اندازه ذرات خاک معمولاً با ترسیم جرم تجمعی ذرات به عنوان تابعی از اندازه آنها نشان داده می‌شود که رابطه اخیر را با استفاده از مدل‌های مختلف آماری نظیر مدل توزیع نرمال (ون باول 1949)، لاگ‌نرمال (کمبل 1985)، و یا توابع توانی (مدل‌های فرکتالی) (تیلرو ویت کرافت 1992) به صورت ریاضی بیان می‌شود. توزیع اندازه ذرات به بیان فرکتالی به صورت تعداد تجمعی ذرات بزرگتر از یک اندازه معین (وو و همکاران 1993) و یا جرم تجمعی ذرات کوچکتر از یک اندازه معین (تیلر و ویت کرافت 1992) مورد استفاده قرار گرفته است. تیلر و ویت کرافت (1992) محدودیت‌های کاربردی مدل فرکتالی مندلبرات (1982) را مورد بررسی قرار داده و نشان دادند که بعد فرکتالی که از این روش به دست می‌آید به خاطر تخمین تقریبی تعداد ذرات از طریق اندازه‌گیری جرم آنها، بیش از مقدار واقعی برآورد می‌شوند. آنها رابطه زیر را بر مبنای جرم نرمال شده کوچکتر از یک اندازه معین به شکل زیر اصلاح نمودند؛

$$\frac{M_{<x}}{M_T} = \left(\frac{x}{x_{\max}}\right)^{3-D} \quad (1)$$



که  $M_{<x}$  و  $M_T$  به ترتیب جرم تجمعی ذرات کوچکتر از یک اندازه معین و جرم کل نمونه خاک،  $M_{<x}/M_T$  نسبت نرمال شده جرم در هر بخش اندازه‌ای،  $x_{max}$  بزرگترین اندازه ذرات در نمونه مورد آزمایش می‌باشد. اگر از طرفین معادله فوق لگاریتم بگیریم به صورت خلاصه زیر در می‌آید:

$$\text{Log } M_{<x} = (3 - D) \text{Log}(x) - a \quad (2)$$

که  $a$  برای هر خاک مقدار ثابتی می‌باشد. فیلگوئرا و همکاران (2003) مدل فرکتالی را ارائه نمودند که جرم تجمعی ذرات کوچکتر از یک اندازه معین را به عنوان تابعی از زمان سقوط ذره در سوسپانسیون نشان می‌دهد. این محققین توزیع جرم-اندازه ذرات در حال سقوط را دارای توزیع فرکتالی فرض کردند، و رابطه بین زمان، چگالی سوسپانسیون و بعد فرکتالی ذرات را بدست آوردند. این معادله رابطه بین جرم ذرات کوچکتر از  $x$  ( $<x$ ) باقی مانده در سوسپانسیون و زمان (از شروع رسوب گذاری تا لحظه خواندن هیدرومتر) را به صورت زیر توصیف می‌نماید:

$$\frac{M_{<x}}{M_T} = \left( \frac{2L^{\frac{3-D}{2}}}{(5-D)B^{\frac{3-D}{2}} X_{Lu}^{3-D}} \right) t^{\frac{D-3}{2}} \quad (3)$$

که  $L$  و  $B$  ثابت‌ها،  $X_{Lu}$  بالاترین محدوده اندازه ذرات که دارای رفتار فرکتالی هستند،  $D$  بعد فرکتالی ذرات و  $t$  زمان از شروع رسوب گذاری می‌باشد. برای یافتن بعد فرکتالی توزیع ذرات خاک معادله (1) در مقیاس تمام لگاریتمی به صورت زیر تغییر می‌یابد:

$$\log \left( \frac{M_{<x}}{M_T} \right) = \log \left( \frac{2L^{\frac{3-D}{2}}}{(5-D)B^{\frac{3-D}{2}} X_{Lu}^{3-D}} \right) + \frac{D-3}{2} \log t \quad (4)$$

استفاده صحیح از توابع فرکتالی برای اجسام طبیعی مستلزم تعیین محدوده قابل کاربرد این مدل‌ها است (ترکت 1986). تیلر و ویت کرافت (1992) مدل فرکتالی خود را برای محدوده اندازه‌ای 0/5 تا 5000 میکرون بکار بردند و مشاهده نمودند که این مدل در تمام این محدوده معتبر نمی‌باشد. وو و همکاران (1993) نیز سه محدوده قابل کاربرد توابع توانی را برای ذرات خاک مشخص نمودند که مرزهای بین این محدوده‌های معتبر شامل 0/05-0/1 و 10-5000 میکرون بودند. فیلگوئرا و همکاران (2006) نیز با استفاده از مدل جرم-زمان محدوده اندازه‌ای سیلت و رس ( $>53$  میکرون) را دارای رفتار فرکتالی اعلام نمودند. بر همین اساس در تحقیق حاضر، ضمن تعیین محدوده معتبر و قابل کاربرد هر یک از مدل‌های فیلگوئرا (فیلگوئرا و همکاران 2003) و تیلر و ویت کرافت (1992) در توصیف توزیع اندازه ذرات، دقت برآزش این مدل‌ها بر داده‌های آزمایشگاهی توزیع اندازه ذرات مورد مقایسه و ارزیابی قرار گرفته است.

## مواد و روش‌ها

توزیع اندازه ذرات 25 نمونه خاک در کلاس‌های مختلف بافتی (جدول 1) به روش گی و بادر (1986) با 18 زمان مختلف قرائت هیدرومتر به دست آمد. به این منظور 40 گرم از نمونه‌های خاک کوچکتر از دو میلی‌متر با محلول کالگون 5% تیمار شدند. به منظور جداسازی ذرات شن، نمونه‌های تیمار شده، از الک 53 میکرون عبور داده شدند و مواد زیر الک نیز به طور کامل به مزور یک لیتری منتقل گردیدند. نمونه‌های باقی مانده بر روی الک، پس از خشک شدن، روی سری غربال‌های 1، 0/5، 0/25، و 0/15 میلی‌متر، بر حسب اندازه تفکیک شدند و سپس جرم هر بخش



اندازه‌ای به طور جداگانه به دست آمد. تفکیک اندازه‌ای سوسپانسیون موجود در مزور یک لیتری به روش ته‌نشینی و به کمک هیدرومتر بایکاس به دست آمد. خواندن هیدرومتر در زمان‌های 30، 40، 60 ثانیه، 2، 5، 10، 20، 30 دقیقه، و 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 12، 24، و 48 ساعت به همراه اندازه‌گیری دما و کنترل شاهد نیز به دقت انجام شد. داده‌های جرم در قرائت‌های هیدرومتر به صورت درصد تجمعی جرم ذرات کوچک‌تر از یک اندازه معین به دست آمدند. این مقادیر برای هر نمونه خاک یک بار در مقابل اندازه ذرات (d) و بار دیگر در مقابل زمان ته‌نشینی ذرات در سوسپانسون (t) با مقیاس لگاریتمی (Log-Log scale) ترسیم گردید. مدل فرکتالی تیلر و ویت‌کرافت (1992) (معادله 2) بر داده‌های جرم-اندازه، و مدل فرکتالی فیلگوئرا و همکاران (2003) (معادله 4) بر داده‌های جرم-زمان برازش داده شدند و مقادیر بعد فرکتالی تیلر و ویت‌کرافت ( $D_x$ )، بعد فرکتالی فیلگوئرا و همکاران ( $D_t$ ) و شیب خطوط رگرسیون  $b_x$  و  $b_t$  برای هر دو مدل تعیین شدند. شیب خطوط رگرسیون برای هر نمونه، با استفاده از آزمون دو طرفه t مورد مقایسه قرار گرفت.

### نتایج و بحث

جدول 1 محدوده وسیع درصد ذرات رس، سیلت و شن را در خاک‌های مورد مطالعه نشان می‌دهد. در خاک‌های مورد مطالعه درصد رس و سیلت به ترتیب از 5-58 و 5-50 درصد متفاوت بودند. شکل 1 داده‌های درصد تجمعی جرم ذرات را برای کلاس‌های بافتی رسی، رس سیلتی، لوم رسی، لوم شنی، و شنی به عنوان تابعی از اندازه ذرات و شکل 2 نیز این مقادیر را به عنوان تابعی از زمان ته‌نشینی ذرات در مقیاس لگاریتمی نشان می‌دهند.

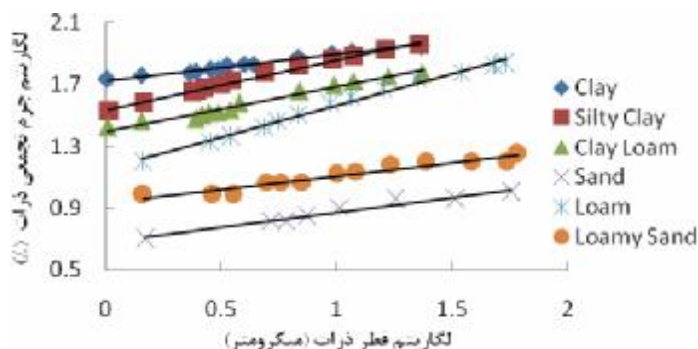


جدول 1- درصد ذرات خاک، بعد فرکتالی، ضرایب رگرسیون و پارامترهای دقت برازش مدل‌های فرکتالی مورد استفاده

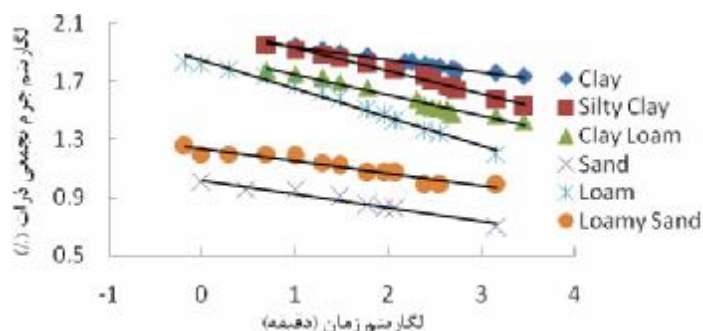
ردیف	بافت	%شن	%سیلت	%رس	$b_x$	$R^2_x$	$b_t$	$R^2_t$	t-value*	$D_x$	$D_t$	$<x^{**}$
1	رسی	11	35	54	0/228	0/985	-0/111	0/986	38/62	2/772	2/778	22/86
2	رسی	20	28	52	0/207	0/976	-0/101	0/976	29/72	2/793	2/798	23/17
3	رسی	15	34	51	0/213	0/975	-0/104	0/975	29/32	2/787	2/792	23/27
4	رسی	14	35	51	0/206	0/982	-0/100	0/982	33/24	2/798	2/800	23/15
5	رسی	12	30	58	0/173	0/982	-0/085	0/982	34/63	2/827	2/830	23/15
6	رسی	12	38	50	0/231	0/977	-0/113	0/978	28/15	2/769	2/774	22/85
7	رسی	20	34	46	0/232	0/983	-0/114	0/983	32/26	2/768	2/772	23/14
8	رسی	10	40	50	0/245	0/986	-0/120	0/986	36/08	2/755	2/760	22/86
9	لومرسی	35	26	39	0/201	0/982	-0/099	0/982	37/04	2/799	2/802	52/94
10	لومرسی	44	27	29	0/328	0/982	-0/162	0/982	33/15	2/672	2/676	23/72
11	لومرسی	31	39	30	0/244	0/987	-0/117	0/987	36/57	2/756	2/766	53/74
12	رس سیلنی	14	45	41	0/299	0/977	-0/143	0/977	23/22	2/701	2/714	20/82
13	رس سیلنی	13	46	41	0/331	0/986	-0/161	0/986	37/23	2/669	2/687	23/10
14	لومرس شنی	47	24	29	0/237	0/974	-0/116	0/974	29/55	2/763	2/768	53/43
15	لومرس شنی	49	25	26	0/253	0/981	-0/124	0/981	27/16	2/747	2/752	23/10
16	لومرس شنی	47	29	24	0/250	0/992	-0/122	0/992	56/65	2/750	2/756	50/19
17	لوم	41	34	25	0/287	0/975	-0/142	0/975	27/54	2/713	2/716	23/57
18	لوم	40	38	22	0/269	0/984	-0/131	0/984	32/81	2/731	2/738	50/80
19	لوم	50	32	18	0/259	0/990	-0/127	0/990	49/36	2/741	2/746	52/13
20	لوم	42	35	23	0/305	0/987	-0/148	0/987	38/65	2/695	2/704	49/52
21	لوم	31	50	19	0/411	0/988	0/196	0/988	38/42	2/589	2/608	53/53
22	لوم شنی	71	12	17	0/162	0/954	-0/080	0/954	21/82	2/838	2/840	53/10
23	لوم شنی	66	18	16	0/267	0/985	-0/132	0/985	31/10	2/733	2/736	23/69
24	شن لومی	84	6	10	0/204	0/976	0/101	0/976	12/84	2/796	2/798	23/30
25	شنی	90	5	5	0/188	0/975	-0/094	0/975	24/36	2/811	2/811	56/87

\* مقدار t محاسباتی در مقایسه ضرایب رگرسیون، \*\* محدوده قابل کاربرد مدل‌های فرکتالی بکار رفته بر حسب میکرون

آزمون t ضرایب رگرسیون‌های حاصل از برازش معادلات 2 و 4 ( $b_t$  و  $b_x$ ) برای هر یک از نمونه‌ها، تفاوت معنی‌داری ( $p < 0.001$ ) را از لحاظ آماری نشان داد. این اختلاف، بیانگر مبانی متفاوت دو مدل در برآورد بعد فرکتالی ذرات می‌باشد. مقادیر بعد فرکتالی ذرات خاک‌های مورد مطالعه در این تحقیق در محدوده قابل کاربرد، بین 2/669 تا 2/840 قرار داشتند، و تفاوت معنی‌دار آماری در سطح احتمال 1% بین برآورد دو مدل جرم-اندازه تیلر و ویت-کرافت (1992)، و جرم-زمان فیلگوئرا و همکاران (2003) دیده نشد. فیلگوئرا و همکاران (2006) نیز بین نتایج برآورد این دو مدل در محدوده قابل کاربرد برای داده‌های توزیع اندازه ذرات، تفاوت آماری مشاهده نکردند.



شکل 1- تغییرات جرم تجمعی ذرات ته نشین شده به عنوان تابعی از قطر ذرات با مقیاس لگاریتمی در بافت‌های مختلف



شکل 2- تغییرات جرم تجمعی ذرات به عنوان تابعی از زمان ته نشینی آنها با مقیاس لگاریتمی در بافت‌های مختلف

نتایج این مطالعه نشان داد که برازش توابع توانی (مدل‌های فرکتالی) بر محدوده کامل اندازه‌های ذرات خاک کوچکتر از 2 میلی‌متر از دقت بسیار پایینی برخوردار است. به عبارت دیگر قابلیت کاربرد مدل‌های فرکتالی در توصیف منحنی توزیع اندازه ذرات، در دامنه معینی از اندازه ذرات خاک می‌باشد. در این تحقیق به منظور تعیین محدوده قابل کاربرد مدل‌های فرکتالی (معادلات 2 و 4)، محدود نمودن دامنه اندازه‌های روی نمودار جرم-اندازه ذرات و یا جرم-زمان در جایی متوقف گردید که دیگر با حذف نقاط باقی مانده، تفاوت معنی‌داری در شیب خط رگرسیون دیده نشد. چنان که نتایج این تحقیق نشان می‌دهد، محدود کردن دامنه اندازه‌های ذرات تا مرز شن و سیلت (ذرات کوچکتر از 53 میکرون) جهت برازش مدل‌های مذکور، با حذف نقاطی از بالای منحنی جرم-اندازه و یا جرم-زمان، سبب بهبود دقت برازش و افزایش مقادیر ضرایب تبیین رگرسیون‌ها ( $R_x^2$  و  $R_t^2$ ) شده است. همانطور که جدول 1 نشان می‌دهد کاربرد مدل‌های مورد استفاده در این تحقیق در هیچ یک از نمونه‌ها، در تمام دامنه اندازه‌های ذرات به قطر 2 میلی‌متر معتبر نمی‌باشند. در 60 درصد از خاک‌های مورد مطالعه، کاهش محدوده اندازه‌های ذرات به کوچکتر از 24 میکرون سبب افزایش قابل ملاحظه ضریب تبیین معادلات رگرسیون و بهبود دقت برازش شد و از آن پس، دیگر تفاوت معنی‌داری در ضرایب رگرسیون و مقادیر بعد فرکتالی به دست آمده، مشاهده نگردید. این شرایط در تمام خاک‌های رسی مورد مطالعه، و به طور کلی در تمام نمونه‌هایی که بیش از 40 درصد رس داشتند، مشاهده شد (جدول 1). در سایر موارد (40 درصد خاک‌ها) محدوده کاربردی مدل‌ها بزرگتر، و شامل ذرات کوچکتر از 53 میکرون بود. این گونه به نظر می‌رسد که ذرات خاک تنها در محدوده اندازه‌های معینی دارای رفتار فرکتالی بوده و مدل‌های فرکتالی که مبتنی بر توابع توانی توسعه پیدا نموده‌اند، دارای محدودیت کاربردی برای ذرات اولیه خاک می‌باشند. این نتیجه، گزارشات سایر محققین (تیلر و ویت‌کرافت 1992، کزاک و همکاران 1996، فیلگوئرا و همکاران 2006) در خصوص محدودیت کاربرد



توابع توانی در توصیف منحنی توزیع اندازه ذرات خاک و محدوده صحیح استفاده از مدل‌های  
فرکتالی جرم- پایه را مورد تایید قرار می‌دهد.

#### منابع:

- Campbell GS. 1985. Soil physics with BASIC: Transport models for soil-plant systems. Elsevier, Amsterdam.
- Filgueira RR, Fournier LL, Cerisola CI, Gelati P, Garcia MG, 2006. Particle-size distribution in soils: A critical study of the fractal model validation. *Geoderma* 134, 327-334.
- Filgueira RR, Pachepsky YA, Fournier LL, 2003. Time-massScaling in soil texture analysis. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 67,1703-1706.
- Gee GW, Bauder J W, 1986. Particle- size analysis, In: Klute, A., et al. (Ed.), *Methods of Soil Analysis Part1, Physical and Mineralogical Methods*, seconded. ASA, Inc., Madison, WI, pp. 383-411.
- Hwang IIS, Kwang PL, Dong SL, Powers, SE, 2002. Models for estimating soil particle-size distributions. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 66, 1143-1150.
- Kozak E, Pachepsky YA, Sokolowski S, Sokolowska Z, Steniewski W, 1996. A modified number-based method for estimating fragmentation fractal dimensions of soils. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 60, 1291-1297.
- Mandelbrot BB, 1982. *The Fractal Geometry of Nature*. Freeman, New York.
- Turcotte DL, 1986. Fractals and fragmentation. *J. Geophys. Res.* 91, 1921-1926.
- Tyler SW, Wheatcraft SW, 1992. Fractal scaling of soil particle-Size distributions: analysis and limitations. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 56, 362-369.
- Van Bavel CHM, 1949. Mean Weight diameter of soil aggregates as a statistical index of aggregation. *Soil Sci. Soc. Am. Proc.* 14, 20-23.
- Vereecken H, Maes J, Feyen J, and Darius P, 1989. Estimating the soil moisture retention characteristic from texture, bulk density, and carbon content. *Soil Sci.* 148:389-403.
- Wu Q, Borkovec M, Sticher S, 1993. On particle size distributions in soils. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 57,883-890.